1. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{1}{x}$

Solución.

Dominio: $D[f(x)]=R-\{0\}$

- Continuidad en x = 0:

- $f(0)=\frac{1}{0}=\infty\notin R$. No existe función en x = 0

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{0}:\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}:\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\Rightarrow\nexists\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$

Discontinua no evitable de salto infinito.

b) $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2-4x+3}$

Solución.

Dominio: $D[f(x)]=R-\{1,3\}$

- Continuidad en x = 1:

- $f(1)=\frac{1^2+2\cdot 1-3}{1^2-4\cdot 1+3}=\frac{0}{0}\notin R$. No existe función en x = 1

- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-4x+3}\underset{\text{Ruffini}}{\overset{0/0}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+3)\cdot(x-1)}{(x-3)\cdot(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+3}{x-3}=\frac{1+3}{1-3}=\frac{4}{-2}=-2$

Discontinua evitable. La función no existe en x = 1, pero tiene límite.

- Continuidad en x = 3:

- $f(3)=3\frac{3^2+2\cdot 3-3}{3^2-4\cdot 3+3}=\frac{12}{0}=\infty\notin R$

- $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+2x-3}{x^2-4x+3}=\frac{12}{0}:\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2+2x-3}{(x-1)\cdot(x-3)}=\frac{3^2+2\cdot 3-3}{(3-1)\cdot(3^- -3)}=\frac{12}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^2+2x-3}{(x-1)\cdot(x-3)}=\frac{3^2+2\cdot 3-3}{(3-1)\cdot(3^+ -3)}=\frac{12}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}:$

$$\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2+2x-3}{x^2-4x+3}\neq\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^2+2x-3}{x^2-4x+3}\Rightarrow\nexists\ \lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+2x-3}{x^2-4x+3}$$

Discontinua no evitable de salto infinito.

c) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}$

Solución.

Dominio: $D[f(x)]=R-\{2\}$

- Continuidad en x = 2:

- $f(2)=3\frac{2^2+3\cdot 2+2}{2^2-4\cdot 2+4}=\frac{0}{0}=\infty\notin R$

- $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4x+4}\overset{0/0}{\underset{\text{Ruffini}}{=}}\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\cdot(x-1)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{2-1}{2-2}=\dfrac{1}{0}=\infty$:

$$:\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^-}\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{2-1}{2^--2}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim_{x\to 2^+}\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{2-1}{2^+-2}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}:\lim_{x\to 3^-}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4x+4}\neq\lim_{x\to 3^+}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4x+4}\Rightarrow\nexists\ \lim_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4x+4}$$

Discontinua no evitable de salto infinito.

d) $f(x)=\begin{cases}9-x^2 & \text{Sí} \quad x\le 1\\ x+1 & \text{Sí}\quad x>1\end{cases}$

Solución.

Dominio: $D[f(x)]=R$. Función definida por expresiones continuas. Se estudia la continuidad en x = 1 (Punto frontera).

- Continuidad en x = 1:

- $f(1)=9-1^2=8$. Existe función en x = 1

- $\lim_{x\to 1}f(x)=\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(9-x^2\right)=9-1^2=8\\ \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=1+1=2\end{array}\right\}:\lim_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim_{x\to 1^+}f(x)\Rightarrow\nexists\ \lim_{x\to 1}f(x)$

Discontinua no evitable de salto finito.

e) $f(x)=\begin{cases}4-2x & \text{Sí}\quad x<0\\ 2x+4 & \text{Sí}\quad x>0\end{cases}$

Solución.

Dominio: $D[f(x)]=R-\{0\}$. Función definida por expresiones continuas. Se estudia la continuidad en x = 0 (Punto frontera).

- Continuidad en x = 0:

- $f(0)=\nexists$. No existe función en x = 0

- $\lim_{x\to 0}f(x)=\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(4-2x)=4-2\cdot 0=4\\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x+4)=2\cdot 0+4=4\end{array}\right\}$:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)\Rightarrow\exists\ \lim_{x\to 0}f(x)=4$$

Discontinua evitable.

f) $g(x)=\begin{cases}x^2+2 & \text{si}\quad x<-3\\ 3x+1 & \text{si}\quad -3\le x<1\\ 2x^2+2 & \quad\quad x>1\end{cases}$

Solución.

Dominio: $D[f(x)]=R-\{1\}$. Función definida por expresiones continuas. Se estudia la continuidad en x = –3, y en x = 1 (Puntos frontera).

- Continuidad en x = –3:

- $f(-3)=(-3)^2+2=11$. Existe función en x = –3
- $\lim_{x\to -3} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to -3^-} f(x)=\lim_{x\to -3^-}\left(x^2+2\right)=(-3)^2+2=11 \\ \lim_{x\to -3^+} f(x)=\lim_{x\to -3^+}(3x+1)=3\cdot(-3)+1=-8 \end{cases}:$

$$\lim_{x\to -3^-} f(x)\neq \lim_{x\to -3^+} f(x)\Rightarrow \nexists \lim_{x\to -3} f(x)$$

Discontinua no evitable de salto finito.

- Continuidad en x = 1:

- $f(1)=\nexists$. No existe función en x = 1
- $\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x+1)=3\cdot 1+1=4 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(2x^2+2\right)=2\cdot 1^2+2=4 \end{cases}:$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)=4$$

Discontinua evitable.

g) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+2} & \text{Sí} \quad -2\le x<0 \\ -\frac{1}{3}x+2 & \text{Sí} \quad 0\le x<3 \\ x-2 & \text{Sí} \quad 3\le x<5 \end{cases}$

Solución.

Dominio: $D[f(x)]=[-2,5)$. Función definida por expresiones continuas en sus dominios de definición. Se estudia la continuidad en x = 0, y en x = 3 (Puntos frontera).

- Continuidad en x = 0:

- $f(0)=\frac{1}{3}\cdot 0+2=2$. Existe función en x = 0
- $\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x+2}=\sqrt{0+2}=\sqrt{2} \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{3}x+2\right)=-\frac{1}{3}\cdot 0+2=2 \end{cases}:$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

Discontinua no evitable de salto finito.

- Continuidad en x = 3:

- $f(3)=3-2=1$. Existe función en x = 3.
- $\lim_{x\to 3} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\left(-\frac{1}{3}x+2\right)=-\frac{1}{3}\cdot 3+2=1 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(x-2)=3-2=1 \end{cases}:$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)\Rightarrow \exists \lim_{x\to 3} f(x)=1=f(1)$$

Continua.

h) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x+2} & \text{Sí} \quad x<0 \\ \dfrac{1}{x^2-1} & \text{Sí} \quad x\ge 0 \end{cases}$

Solución.

Dominio: $D[f(x)] = R-\{-2,1\}$. La continuidad se estudia en –2, 0 y 1.

- Continuidad en x = –2:

- $f(-2)=\dfrac{-2}{-2+2}=\dfrac{-2}{0}=\infty\notin R$

- $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{-2}{0}:\begin{Bmatrix} \lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{-2}{-2^-+2}=\dfrac{-2}{0^-}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{-2}{-2^++2}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty \end{Bmatrix}:$

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{x}{x+2}\neq\lim_{x\to -2^+}\frac{x}{x+2}\Rightarrow\nexists\ \lim_{x\to -2}\frac{x}{x+2}$$

Discontinua no evitable de salto infinito.

- Continuidad en x = 0:

- $f(0)=\dfrac{1}{0^2-1}=-1$. Existe función en x = 0.

- $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\begin{Bmatrix} \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{0}{0+2}=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^2-1}=-1 \end{Bmatrix}:$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim_{x\to 0^+}f(x)\Rightarrow\nexists\ \lim_{x\to 0}f(x)$$

Discontinua no evitable de salto finito.

- Continuidad en x = 1:

- $f(1)=\dfrac{1}{1^2-1}=\dfrac{1}{0}=\infty\notin R$

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{0}:\begin{Bmatrix} \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{(x+1)\cdot(x-1)}=\dfrac{1}{(1+1)\cdot(1^--1)}=\dfrac{1}{2\cdot 0^-}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{(x+1)\cdot(x-1)}=\dfrac{1}{(1+1)\cdot(1^+-1)}=\dfrac{1}{2\cdot 0^+}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \end{Bmatrix}:$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x+2}\neq\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x+2}\Rightarrow\nexists\ \lim_{x\to 1}\frac{x}{x+2}$$

Discontinua no evitable de salto infinito.

i) $f(x)=\left|x^2-9x+8\right|$

Solución.

Se transforma el valor absoluto a función por intervalos teniendo en cuenta el signo de la expresión.

$$x^2-9x+8=0:\begin{cases} x=1 \\ x=8 \end{cases}$$

$$(-\infty,1)\cup(8,+\infty): f(x)>0$$

$$(1,8): f(x)<0$$

$$f(x)=\left|x^2-9x+8\right|=\begin{cases} x^2-9x+8 & \text{Si} \quad x\le 1 \\ -\left(x^2-9x+8\right) & \text{Si} \quad 1<x<8 \\ x^2-9x+8 & \text{Si} \quad x\ge 8 \end{cases}$$

Dominio: $D[f(x)]=R$. Función definida por expresiones continuas. Se estudia la continuidad en x = 1, y en x = 8 (Puntos frontera).

- Continuidad en x = 1:

- $f(1)=1^2-9\cdot 1+8=0$. Existe función en x = 1.
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-9x+8\right)=1^2-9\cdot 1+8=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} -\left(x^2-9x+8\right)=-\left(1^2-9\cdot 1+8\right)=0 \end{matrix}\right\}:$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x)=0=f(1)$$

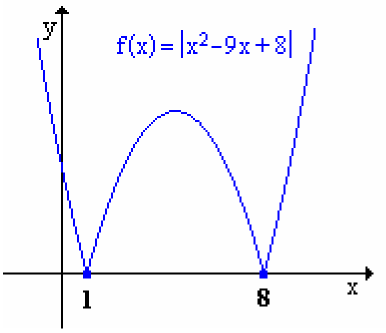
Continua.

- Continuidad en x = 8:

- $f(8)=8^2-9\cdot 8+8=0$. Existe función en x = 8.
- $\lim\limits_{x\to 8} f(x)=\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 8^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 8^-} -\left(x^2-9x+8\right)=-\left(1^2-9\cdot 1+8\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to 8^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 8^+}\left(x^2-9x+8\right)=\left(1^2-9\cdot 1+8\right)=0 \end{matrix}\right\}:$

$$\lim_{x\to 8^-} f(x)=\lim_{x\to 8^+} f(x)\Rightarrow \exists \lim_{x\to 8} f(x)=0=f(8)$$

Continua.



En x = 1 y en x = 8 se forman lo que se denomina puntos vértices ó angulosos, en los cuales la función es continua pero no derivable

j) $f(x)=|x|+|x-1|$

Solución.

Una función con valores absolutos se transforma en una función por intervalos teniendo en cuenta los signos que toman las expresiones en valor absoluto. Si la expresión es positiva el valor absoluto no la modifica, si es negativa, el valor absoluto la transforma multiplicando por (−1).

El estudio del signo de las expresiones, se hace en función de los ceros de estas.

x = 0; x −1 = 0: x = 1

$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$x<0 \Rightarrow \lvert x\rvert=-x$		$x>0 \Rightarrow \lvert x\rvert=x$		$x>0 \Rightarrow \lvert x\rvert=x$
$x-1<0 \Rightarrow \lvert x-1\rvert=-1\cdot(x-1)$		$x-1<0 \Rightarrow \lvert x-1\rvert=-1\cdot(x-1)$		$x-1>0 \Rightarrow \lvert x-1\rvert=x-1$

$$f(x)=\begin{cases} -1\cdot x+(-1)\cdot(x-1) & \text{Si} \quad x\le 0 \\ x+(-1)\cdot(x-1) & \text{Si} \quad 0<x<1 \\ x+(x-1) & \text{Si} \quad x\ge 1 \end{cases} : f(x)=\begin{cases} 1-2x & \text{Si} \quad x\le 0 \\ 1 & \text{Si} \quad 0<x<1 \\ 2x-1 & \text{Si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

Dominio: $D[f(x)]=R$. La función presenta puntos angulosos en 0 y en 1, siendo continua y no derivable en estos puntos.

- Continuidad en x = 0:

- $f(0)=1-2\cdot 0=1$. Existe función en x = 0.
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-2x)=1-2\cdot 0=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 1=1 \end{array}\right\}:$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$$

Continua.

- Continuidad en x = 1:

- $f(1)=2\cdot 1-1=1$. Existe función en x = 1.
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=:\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 1=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=(2x-1)=2\cdot 1-1=1 \end{array}\right\}:$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x)=1=f(1)$$

Continua.

k) $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$

Solución.

El valor absolut0 de x $(|x|)$ se transforma en –x si x < 0, y en x si x ≥ 0, obteniendo una función por intervalos.

$$f(x)=\frac{x}{1+|x|}=\begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{Si} \quad x<0 \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{Si} \quad x\ge 0 \end{cases}$$

Dominio: $D[f(x)]=R$. Se estudia la continuidad en x = 0 (Puntos frontera).

- Continuidad en x = 0:

- $f(0)=\dfrac{0}{1+0}=0$. Existe función en x = 0.
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{0}{1-0}=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{0}{1+0}=0 \end{array}\right\}:$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$$

Continua.

l) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & \text{Si} \quad x\neq 0\\ 1 & \text{Si} \quad x=0\end{cases}$

Solución.

- Continuidad en x = 0:

- $f(0)=1$. Existe función en x = 0.

- $$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\underset{\text{Conjugado}}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{-2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{-2}{2}=-1$$

- $\lim_{x\to 0} f(x)=-1\neq f(0)=1$. Discontinua evitable.

m) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x^3-8} & \text{Si} \quad x\neq 2\\ 1/4 & \text{Si} \quad x=2\end{cases}$

Solución.

- Continuidad en x = 2:

- $f(2)=\dfrac{1}{4}$. Existe función en x = 2.

- $$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^3-8}\underset{\text{Ruffini}}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot\left(x^2+2x+4\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2+2x+4}=$$
$$=\frac{2+1}{2^2+2\cdot 2+4}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

- $\lim_{x\to 2} f(x)=\dfrac{1}{4}=f(0)$. Continua.

2. Calcula el valor del parámetro a para que la función sea continua

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax & \text{Si} \quad x\leq 1\\ \text{Ln } x & \text{Si} \quad x>1\end{cases}$$

Solución.

El parámetro a se calcula aplicando la condición de continuidad en el punto frontera (x = 1).

Para que la función sea continua en x = 1 se debe cumplir:

$$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$$

Para que exista límite en x = 1 deben existir los límites laterales y ser iguales.

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$1^2 + a\cdot 1 = \lim_{x\to 1^-}\left(x^2 + ax\right) = \lim_{x\to 1^+} \operatorname{Ln} x$$
$$1^2 + a\cdot 1 = \operatorname{Ln} 1$$
$$1 + a = 0 : \quad a = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{Si} \quad x \le 1 \\ \operatorname{Ln} x & \text{Si} \quad x > 1 \end{cases}$$

3. Calcula los valores de a y b para que la función sea continua

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{Si} \quad x < -1 \\ x^2 + ax + b & \text{Si} \quad -1 \le x \le 1 \\ x + 1 & \text{Si} \quad x < 1 \end{cases}$$

Solución.

Los parámetros a y b se calculan aplicando la condición de continuidad en los puntos frontera (x = –1, x = 1), obteniendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que permite calcular los parámetros.

Para que la función sea continua en **x = –1** se debe cumplir:

$$f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x)$$

Para que exista límite en x = –1 deben existir los límites laterales y ser iguales.

$$f(1) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$$
$$(-1)^2 + a\cdot(-1) + b = \lim_{x\to -1^-}(x-1) = \lim_{x\to -1^+}\left(x^2 + ax + b\right)$$
$$(-1)^2 + a\cdot(-1) + b = -1 - 1 : \ -a + b = -3$$

Para que la función sea continua en **x = 1** se debe cumplir:

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$$

Para que exista límite en x = 1 deben existir los límites laterales y ser iguales.

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$
$$1^2 + a\cdot 1 + b = \lim_{x\to -1^-}\left(x^2 + ax + b\right) = \lim_{x\to -1^+}(x+1)$$
$$1^2 + a\cdot 1 + b = 1 + 1 \ : \quad a + b = 1$$

Las condiciones de continuidad permiten plantear el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -a + b = -3 \\ a + b = 1 \end{cases} : \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{Si} \quad x < -1 \\ x^2 + 2x - 1 & \text{Si} \quad -1 \le x \le 1 \\ x + 1 & \text{Si} \quad x < 1 \end{cases}$$

4. Calcula el valor del parámetro a para que la función sea continua

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{Si} \quad x\le a \\ x+3 & \text{Si} \quad x>a \end{cases}$$

Solución.

La condición de continuidad en el punto frontera (x = a), permite obtener una igualdad donde despejar el valor de a.

Para que la función sea continua en **x = a** se debe cumplir:

$$f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$$

Para que exista límite en x = a deben existir los límites laterales y ser iguales.

$$f(a)=\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)$$

$$a^2+1=\lim_{x\to a^-}\left(x^2+1\right)=\lim_{x\to a^+}(x+3)$$

$$a^2+1=a+3 \ : \ a^2-a-2=0 : \begin{cases} a=-1 \\ a=2 \end{cases}$$

Existen dos posibilidades:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{Si} \quad x\le -1 \\ x+3 & \text{Si} \quad x>-1 \end{cases} \ \text{ó} \ f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{Si} \quad x\le 2 \\ x+3 & \text{Si} \quad x>2 \end{cases}$$

5. Calcula el valor de k para que la función sea continua

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-\sqrt{x^2+3}}{x^2-1} & \text{Si} \quad x\ne 1 \\ K & \text{Si} \quad x=1 \end{cases}$$

Solución.

Para que la función sea continua en x = 0 se debe cumplir:

$$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$$

$$K=\lim_{x\to 1}\frac{2x-\sqrt{x^2+3}}{x^2-1} \underset{\substack{\text{Conjugado}\\ \text{y}\\ \text{Rufini}}}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{\left(2x-\sqrt{x^2+3}\right)\cdot\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x)^2-\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-\left(x^2+3\right)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x^2-1\right)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3}{2x+\sqrt{x^2+3}}=\frac{3}{2\cdot 1+\sqrt{1^2+3}}=\frac{3}{4}$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-\sqrt{x^2+3}}{x^2-1} & \text{Si} \quad x\ne 1 \\ \dfrac{3}{4} & \text{Si} \quad x=1 \end{cases}$$